Vorlesung 6a

Varianz und Kovarianz

Teil 4

Umrechung von $\mathbf{Var}[X]$,

Varianz der Poissonverteilung

(Buch S. 24, 29)

Manchmal verwenden wir die “hilfreiche Formel”:

$$\boxed{\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2}$$

Beweis:

$$\mathbf{E}[(X-\mu)^2] = \mathbf{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

$$= \mathbf{E}[X^2] - 2\mu\mathbf{E}[X] + \mu^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mu^2$$

(wegen Linearität des Erwartungswertes)

Zur Erinnerung:

Die Poissonverteilung mit Parameter λ

entsteht als Grenzwert von Binomialverteilungen mit

$n \to \infty, \ p \to 0, \ np \to \lambda$.

Weil dann npq gegen λ konvergiert,

steht zu vermuten:

Die Varianz einer Pois(λ)-verteilten Zufallsvariablen X ist λ.

Beweis durch Rechnung:

$$\mathbf{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda} = \lambda^2.$$

Also:

$$\mathbf{E}[X^2] = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}[X] = \lambda^2 + \lambda,$$

$$\mathbf{Var[X]} = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \lambda.$$